代数幾何学シンポジウム記録
1991年度 pp.1-17

On the geometry of determinantal varieties associated to 2-bundles on $\mathbb{P}^n$

広島大学理学部 隅広秀康

§1. Introduction

1.1) $\mathbb{P}^n$上の階数2のベクトル束及び余次元2の非特異閉部分多様体に関する次の重要問題が提起されてから約20年が経過したが，未だに未解決のままである([4],[10],[12]).

Hartshorne予想：$\mathbb{P}^n$ ($n \geq 6$) 上の階数2のベクトル束Eは線束の直和に分解される，i.e.，$E = \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). 又は，余次元2の非特異閉部分多様体Xは完全交差である，i.e.，$X = S_1 \cap S_2$ (S_i : $\mathbb{P}^n$の超曲面).

上記予想は階数2，余次元2に限らずもっと一般的な条件の下で考えられているが，最も簡単な上記の場合ですら未解決であるので，ここでは階数2，余次元2に限って取扱うこととする.

1.2) この問題解決に向けて種々の試みがされているが，公表されている主なものは次の通りであろう.

$X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$：非特異閉部分多様体，余次元 = 2，

$d = \deg X$.

1.2.1) W. Barth, Van de Ven (1974) [2]:

$d \leq \frac{1}{4}(n+5) \rightarrow X$：完全交差.

1.2.2) Z. Ran (1983) [8]: $\Lambda^2 N_{X/\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_X(\nu)$ $(\nu \in \mathbb{Z})$.

i) $\nu \geq \dfrac{d}{(n-2)} + (n-2)$，又は ii) $d \leq n-2$

$\rightarrow X$；完全交差.

1.2.3) A. Holme (1989) [5]:

$6 \leq n \leq 11$ に対し，関数 $D(n)$ を次の様に定める.

n	6	7	8	9	10	11
$D(n)$	62	80	107	131	155	194

この時，$d \leq D(n) \rightarrow X$：完全交差.

1.2.4) 自然数 t に対し，次の制限射：$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(t))$ が全射のとき，X を t-normal という. $n \geq 6$ のとき，X が完全交差であることと X が全ての自然数 t に対して t-normal であることは同値である.

1.2.5) F. L. Zak (1981) [13]:

$n \geq 5 \rightarrow X$：1-normal.

1.2.6) Z. Ran (1984) [9]:

$n \geq 3t^2 + 2t + 2 \rightarrow X$：$t$-normal.

1.2.7) Th. Peternel, J. Le-Potier, M. Schneider

(1987) [6]:

$$n \geq 12 \rightarrow X : t\text{-normal } (t=1,2).$$

1.2.8) A. Alzati, G. Ottaviani (1990) [1]:

$$n \geq 6 \rightarrow X : t\text{-normal } (6t \leq n+2).$$

1.3) $\mathbb{P}^n$ 上の 2-bundles に付随する Determinantal varieties を考えついた動機は Hartshorne 予想の本質を変えないで，より低次元代数多様体上の問題に帰着させることである．本質を変えないで，上記予想を低次元代数多様体上の問題に帰着出来ているが現在の所上記予想を解決するに到っていない．しかし，副産物として次の結果をはじめとして，いくつかの有用な諸結果が得られている．

i) 完備線型系の既約性判定法．

ii) $\mathbb{P}^n$ 上の 2-bundles の symmetric tensors に関する消滅定理．

これら副産物を中心に Determinantal varieties の geometry を紹介する．Hartshorne 予想への試みとしての我々の Determinantal varieties の手法は 1.2) の諸結果をもたらした種々の方法とも互いに関連しあっている．この方法がベクトル束と代数幾何学との関係を解明する新らしい方法であることを期待している．

§2. Determinantal Varieties

2.1) E を $\mathbb{P}^n$ ($n=2m$, 又は $n=2m+1$) 上の階数2のベクトル束, $\pi: P(E)\to\mathbb{P}^n$ を E に付随する射影束, $\{s_1,\cdots,s_{m+1}\}$ を次の条件をみたす $(m+1)$ 個の E の global sections とする:

1) $Y=D_1\cap\cdots\cap D_{m+1}$: $P(E)$ の余次元 $(m+1)$ の非特異閉部分多様体. ただし, D_i は s_i に付随する $P(E)$ の tautological divisor.

2) $\bigcap_{i=1}^{m+1} W(s_i)=\phi$, $W(s_i)=s_i$ の zero locus.

このとき, $\mathbb{P}^n$ の閉部分集合 X を次の様に定める.

$$X:\quad s_i\wedge s_j=0,\quad 1\le i<j\le m+1.$$

構造射 $\pi: P(E)\to\mathbb{P}^n$ は X と Y との間の同型を与える. 従って, X は $\mathbb{P}^n$ の $(n-m)$ 次元非特異閉部分多様体である. X は E の global sections の取り方に依存するが,

<u>定義</u> 1 X を E の Determinantal variety という.

2.2) $V=H^0(\mathbb{P}^n,E)$, $\langle s\rangle=\langle s_1,\cdots,s_{m+1}\rangle$ ($s_i\in H^0(\mathbb{P}^n,E)$) を V の $(m+1)$ 次元部分ベクトル空間, $G=\mathrm{Grass}(m+1,V)$ をグラスマン多様体とする.

$G\ni{}^\forall\langle s\rangle=\langle s_1,\cdots,s_{m+1}\rangle$ に対し, $P(E)$ の閉部分集合

$$Y_{\langle s\rangle}:=D_1\cap\cdots\cap D_{m+1},\quad D_i=s_i\text{ の taut. divisor.}$$

とする. $P(E)\times G$ の閉部分集合 $\mathcal{Y}$ を次の様に定める.

$$\mathcal{Y}:=\{(x,\langle s\rangle)\in P(E)\times G \mid x\in Y_{\langle s\rangle}\}.$$

$$p:\mathcal{Y}\longrightarrow P(E),\quad q:\mathcal{Y}\longrightarrow G.$$

ただし，p, q は射影写像である．

<u>定理</u> 2　i)　$U = \{\langle s \rangle \in G \mid \langle s \rangle$ は 2.1) の条件 1), 2) をみたす．$\}$ は G の Zariski 開集合である．

ii)　E の determinantal varieties は U 上の smooth family をなす，i.e., $q : q^{-1}(U) \subset \mathcal{Z} \to U$ は smooth projective map である．従って，E の determinantal varieties の微分幾何学的諸性質は E の global sections の取り方によらない．

§ 3.　Topologies

3.1)　$X \simeq Y$ は $\mathbb{P}(E)$ の豊富因子の切断によって得られるから，Weak Lefschetz theorem, Hodge decomposition theorem, Hard Lefschetz theorem により，X の topologies は次の様に決定される．X 上の因子 H, D を次の様に定める：

$H = \mathbb{P}^n$ の hyperplane の X への制限，

$D = \mathbb{P}(E)$ の taut. div. の X への制限．

<u>定理</u> 3　i)　$i \leq n-(m+1)$ に対し，

$$H^i(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & (i = \text{奇数}), \\ \mathbb{Z}H^{\frac{i}{2}} \oplus \mathbb{Z}H^{\frac{i}{2}-1}D & (i = \text{偶数}) \end{cases}$$

ii)　$p+q \leq n-(m+1)$ ならば，

$$H^{p,q}(X) = \begin{cases} 0 & (p+q : \text{奇数}, \text{又 } p \neq q) \\ \mathbb{C}H^p \oplus \mathbb{C}H^{p-1}D & (p = q) \end{cases}$$

iii)　$p+q \geq n-m+1$ ならば，

$$H^{p,q}(X)=\begin{cases} 0 & (p+q:\text{奇数},\ \text{又}\ p\neq q), \\ \mathbb{C}H^p\oplus \mathbb{C}H^{p-1}D & (p=q). \end{cases}$$

iv) $n\geq 3$ ならば，$H^1(X,\mathbb{Z})=0$，$q(X)=0$．$n\geq 5$ ならば，$H^2(X,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}H\oplus\mathbb{Z}D$，$H^{2,0}=H^{0,2}=0$．

3.2) $\mathbb{P}^1$-fibration $\pi : P(E)\to\mathbb{P}^n$ の homotopies に関する完全列，Lefschetz theorem より，X の基本群は次の様に決定される

<u>定理</u> 4　i) $n\geq 3 \to \pi_1(X)=0$，i.e.，X：単連結．

ii) $n\geq 5 \to \pi_2(X)=\overset{2}{\oplus}\mathbb{Z}$．

iii) $n\geq 7 \to \pi_i(X)=\pi_i(\mathbb{P}^1)$，$3\leq i\leq n-(m+1)$．

§ 4.　Divisors

4.1) $n\geq 5$ とする．定理3より，

i) $\mathrm{Pic}(X)=\mathbb{Z}H\oplus\mathbb{Z}D$，

ii) $L\in\mathrm{Pic}(X)$ に対し，$L\equiv 0$ (num. equiv.) $\leftrightarrow rL=0$ $(\exists r\in\mathbb{N})$.

iii) $K_X=(m-1)D+(c_1-(n+1))H$．ただし，c_i $(i=1,2)$ は E の Chern numbers.

L_E を $P(E)$ の taut. line bundle とするとき，次の完全列が存在する：

$$0\to\mathcal{O}_{P(E)}(\pi^*(c_1H))\otimes L_E^{-1}\to\pi^*(E)\longrightarrow L_E\to 0.$$

この完全列を X に制限することにより，次の完全列を得る．

$$(*)\qquad 0\to\mathcal{O}_X(F)\xrightarrow{\alpha}E|X\xrightarrow{\beta}\mathcal{O}_X(D)\longrightarrow 0,$$

$$F = c_1 H - D \in Pic(X).$$

X : $s_i \wedge s_j = 0$ ($1 \leq i < j \leq m+1$) であるから，各 $s_i \in H^0(\mathbb{P}^n, E)$ は $\beta(s_i) = 0$ をみたす．従って，s_i は $H^0(\mathcal{O}_X(F))$ の元とみなされ，完備線型系 $|F|$ の m 次元部分線型系 $\mathcal{L} = (F, L)$ を引起こすことが解かる．

<u>定理 5</u>　i)　線型系 $\mathcal{L}$ は固定点をもたない．

ii)　$\varphi : X \to \mathbb{P}^m$ を $\mathcal{L}$ で定義される正則写像とすると，$\mathbb{P}^m$ の任意の点 y に対し，$\dim \varphi^{-1}(y) \leq 1$, i.e., F は 1-ample (A. Sommese の意味で) である．

iii)　n = 偶数 → φ は generically finite, $\deg \varphi = c_2^m$,

n = 奇数 → φ は種数 $= 1 + \frac{1}{2}\{mc_1 - (n+1)\} c_2^m$ の non-hyperelliptic curves の degeneration.

4.2)　完備線型系の既約性判定法

X を一般の非特異射影多様体，$N^1(X) = (Pic(X)/num.) \otimes \mathbb{R} = \overset{\rho}{\oplus} \mathbb{R}$ ($\rho = X$ のピカール数), $\overline{NE}^1(X)$ = pseudo-effective divisors のなす cone とする．

<u>定理 6</u>　$N^1(X)$ は次の条件をみたす基底 $\{D_1, \ldots, D_\rho\}$ ($D_i \in Pic(X)$) をもつものとする：任意の因子 D に対して，

$$D = \sum_{i=1}^{\rho} n_i D_i \quad (n_i \in \mathbb{Z}).$$

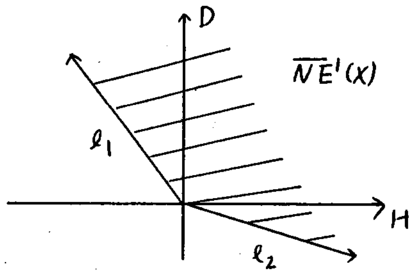
このとき，X の正因子 F が次の性質

i)　$F = \sum_{i=1}^{\rho} m_i D_i$, g.c.d. $(m_1, \ldots, m_\rho) = 1$,

ii) $\mathbb{R}_+[F]$ は $\overline{NE}^1(X)$ の extremal ray である．

をみたすならば，完備線型系 $|F|$ のすべてのメンバーは既約である．

4.3) $n \geq 5$ とする．$N^1(X) = \overset{2}{\oplus}\mathbb{R}$ であるから，$\overline{NE}^1(X)$ は2つの境界 l_1, l_2 をもつ



$\mathbb{N} \ni {}^\forall r$ に対し，

$$a(r) = \max\{ s \in \mathbb{Z} \mid rD - sH : \text{正因子} \},$$
$$b(r) = \min\{ s \in \mathbb{Z} \mid sH - rD : \text{正因子} \},$$

とし，

$$\theta_1 = \sup_{r \in \mathbb{N}} \{ a(r)/r \}, \quad \theta_2 = \inf_{r \in \mathbb{N}} \{ b(r)/r \}$$

とおく．このとき，

$$l_1 = \mathbb{R}_+[D - \theta_1 H], \quad l_2 = \mathbb{R}_+[\theta_2 H - D].$$

n が奇数のとき，F は nef，$F^{m+1} = 0$ であるから，$b(r) = rc_1$ $({}^\forall r \in \mathbb{N})$．従って，$\theta_2 = c_1$, i.e., $l_2 = \mathbb{R}_+[F]$．定理6により，$|F|$ の任意のメンバーは既約である．

4.4) $a = a(1)$ とし，$Z = D - aH$, $\check{Z} = D - (c_1 - a)H = aH - F$ とおく．$\dim|rZ| = 0$ $({}^\forall r \in \mathbb{N})$ ならば，$a(r) = ra$ $({}^\forall r \in \mathbb{N})$，従っ

て，$\theta_1 = a$ となり，$l_1 = \mathbb{R}_+[Z]$．故に，定理6より，Z は既約である．正因子 Z は E の線束への分解問題において，重要な役割を果たす．又，E が unstable ならば $l_1 = \mathbb{R}_+[Z]$ が示される．

§5. A vanishing theorem for symmetric tensors of 2-bundles on $\mathbb{P}^n$

5.1) 有用な KAN 消滅定理（小平－秋月－中野）は種々の形に一般化されている．中野，P.A. Griffiths, J. Le-Potier 等による消滅定理のベクトル束への拡張は高余次元閉部分多様体の研究において有用な諸結果を得ている（[3],[7],[11]）．これら消滅定理は Hartshorne 予想とも関連しており，1.2) で示された諸結果において有用な手法となっている．しかし，ベクトル束の場合には線束と違って symmetric tensors に関する消滅定理は最も自然と思われる形においてすら成立しなく，閉部分多様体の高次近傍，又形式スキームの研究において障害となっている．しかし，射影空間上の階数2のベクトル束の symmetric tensors に関しては，次の消滅定理が成立することが示される．

<u>定理7</u>　E, L を $\mathbb{P}^n$ 上の階数2のベクトル束及び線束とする．E が k-ample（又，global sections で生成される），L が global sections で生成される（又，k-ample）ならば，任

意自然数 ν に対し,

$$H^q(\mathbb{P}^n, S^\nu(E)\otimes L\otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n}) = 0\ ,\ p+q \geq n+2+k.$$

5.2) X を $\mathbb{P}^n$ 上の k-ample 2-bundle の global section の zero locus で余次元 2, 既約閉部分多様体(必ずしも, 非特異とは限らない)とする. 定理7により, X の高次近傍, 形式スキームが標準的手法で取扱われ X に関する Barth 型の次の定理が成り立つ.

<u>定理8</u> i) $n \geq 5+k \rightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \simeq \mathrm{Pic}(X)$.

ii) 制限射: $H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{C})$ は $i \leq n-3-k$ のとき同型であり, $i = n-2-k$ のとき単射である.

iii) $n > 2+k \rightarrow cd(\mathbb{P}^n \setminus X) \leq 1+k$.

5.3) X を $\mathbb{P}^n$ 上の 2-bundle E の determinantal variety とする. 定理7により, X 上の因子のコホモロジーと対応するコホモロジー $H^i(\mathbb{P}^n, S^r(E)(s))$ $(r, s \in \mathbb{Z})$ の相当関係が示される. 従って, X の幾何とコホモロジー $H^i(\mathbb{P}^n, S^r(E)(s))$ の関係が示される. 例えば, E の stability, 線束への分解が X 上の幾何に翻訳される.

§6. Cohomologies

6.1) Determinantal variety X $(\simeq Y)$ を定義する tautological divisors を $\{D_i\}$ $(1 \leq i \leq m+1)$ とする. 自然数 k $(1 \leq k \leq m+1)$ に対し,

$$Y_k := D_1 \cap \cdots \cap D_k,$$

とおくと，閉部分集合による filtration : $P(E) = Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_{m+1} = Y$ を得る．任意整数 r, s に対し，次の完全列が存在する：

$$0 \to \mathcal{O}_{Y_{k-1}}((r-1)D+sH) \to \mathcal{O}_{Y_{k-1}}(rD+sH) \to \mathcal{O}_{Y_k}(rD+sH) \to 0,$$

$$\to H^i(\mathcal{O}_{Y_{k-1}}((r-1)D+sH)) \to H^i(\mathcal{O}_{Y_{k-1}}(rD+sH)) \to H^i(\mathcal{O}_{Y_k}(rD+sH)) \to .$$

従って，制限射 $\gamma_k^i : H^i(\mathcal{O}_{Y_{k-1}}(rD+sH)) \to H^i(\mathcal{O}_{Y_k}(rD+sH))$ の全単射性の障害は $H^i(\mathcal{O}_{Y_{k-1}}((r-1)D+sH))$, $H^{i+1}(\mathcal{O}_{Y_{k-1}}((r-1)D+sH))$ に存在する．これら障害を分析することにより，制限射 $\gamma = \gamma_{m+1}^i \cdots \gamma_1^i : H^i(\mathcal{O}_{P(E)}(rD+sH)) \to H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH))$ が全単射になるための条件を求めることが出来る．整数 r, s の値によって次の様に場合分けすれ，更に定理7を利用して次の諸結果が得られる．$P(E)$ を P で表わす．

6.2) $r=1,\ s\le 0$:

$$H^i(\mathcal{O}_P(D+sH)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(D+sH)), \quad 0\le i\le n-m-1,\ s<0,$$

$$H^i(\mathcal{O}_P(D)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(D)), \quad 0\le i\le n-m-1,\ s=0,$$

$$h^0(\mathcal{O}_P(D)) = h^0(\mathcal{O}_X(D)) + (m+1), \quad i=0,\ s=0.$$

6.2.1) $H^i(\mathcal{O}_X(-F)) = 0, \quad 0\le i\le n-m-1.$

6.2.2)

$$E : \text{unstable} \iff a \ge \begin{cases} \frac{1}{2}c_1 & (c_1 : \text{偶数}), \\ \frac{1}{2}(c_1+1) & (c_1 : \text{奇数}). \end{cases}$$

6.3) $2\le r\le m,\ s\le 0$:

自然数 j, ℓ ($j<\ell$) を次の条件をみたすものとする：

$$H^i(\mathbb{P}^n, S^p(E)(s)) = 0, \quad j \le {}^\forall i \le \ell-p+1, \quad 1 \le {}^\forall p \le r-1.$$

$$\to H^i(\mathcal{O}_P(rD+sH)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH)), \quad j \le i \le \min(\ell-r+1, n-m-1).$$

6.3.1) E : unstable $\leftrightarrow H^0(\mathcal{O}_X(2D-c_1H)) = H^0(\mathcal{O}_X(D-F)) \ne 0$.

6.3.2) $H^i(\mathbb{P}^n, \underline{End}(E)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(2D-c_1H)), \quad 1 \le i \le n-m-1$.

6.3.3) $n \ge 5$, 奇数 $\to |Z|$ の任意メンバーは既約．

6.4) $r = m+1, \ s \le 0$:

自然数 j, ℓ ($j<\ell$) を次の条件をみたすものとする：

$$H^i(\mathbb{P}^n, S^p(E)(s)) = 0, \quad j \le {}^\forall i \le \ell-p+1, \quad 1 \le {}^\forall p \le r.$$

$$\to H^i(\mathcal{O}_P(rD+sH)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH)), \quad j \le i \le \min(\ell-r+1, n-m-2).$$

6.5) $r \ge m+2, \ s \le 0$:

自然数 j, ℓ ($j<\ell$) を次の条件をみたすものとする：

$$H^i(\mathbb{P}^n, S^{r-1-m+p}(E)(s)) = 0, \quad j \le {}^\forall i \le \ell-p, \quad 0 \le {}^\forall p \le m.$$

$$\to H^i(\mathcal{O}_P(rD+sH)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH)), \quad j \le i \le \ell-m-1.$$

6.5.1) $H^i(\mathcal{O}_X(-rF)) = 0, \quad 0 \le i \le n-m-2, \quad 2 \le r$.

6.5.2) E : 線束の直和 $\to a(r) = ra \ ({}^\forall r \in \mathbb{N})$, i.e., $\theta_1 = a$.

6.6) $-r \le 0, \ s \ge 0$:

自然数 j, ℓ ($j<\ell$) を次の条件をみたすものとする：

$$H^i(\mathbb{P}^n, S^{r-1+m-p}(E^*)(-c_1+s)) = 0, \quad j-1 \le {}^\forall i \le \ell-p, \quad 0 \le {}^\forall p \le m.$$

$$\to H^i(\mathcal{O}_P(-rD+sH)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(-rD+sH)), \quad j \le i \le \ell-m.$$

6.6.1) $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(s)) \simeq H^0(\mathcal{O}_X(s)), \quad 0 \le s < c_1$. 従って，$X$ は

t-normal ($0<t<c_1$). 更に, $H^i(\mathcal{O}_X(sH))=0$, $1\le i\le n-m-2$, $0\le s\le c_1$.

6.6.2) $H^i(\mathcal{O}_X(F))=0$, $1\le i\le n-m-2$.

6.6.3) $H^i(\mathcal{O}_X(-2D+c_1H))=H^i(\mathcal{O}_X(F-D))=0$, $0\le i\le n-m-2$, $i\ne 1$. $H^1(\mathcal{O}_X(-2D+c_1H))=\mathbb{C}$. 故に, 完全列: $0\to\mathcal{O}_X(F)\to E|X\to\mathcal{O}_X(D)\to 0$ は唯一つの non-splitting extension である.

6.6.4) E: 線束の直和 → $H^i(\mathcal{O}_X(sH))=0$, $1\le i\le n-m-1$, s: 任意整数. 更に, $H^i(\mathcal{O}_X(-rD+sH))=0$, $1\le i\le n-m-1$, s: 任意整数.

6.7) $r\ge m$, $s\ge 0$:

自然数 j, l ($j<l$) を次の条件をみたすものとする:

$H^i(\mathbb{P}^n, S^{r-1-m+p}(E)(s))=0$, $j\le {}^\forall i\le l+m-p+1$, $0\le {}^\forall p\le m$.

→ $H^i(\mathcal{O}_P(rD+sH))\simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH))$, $j\le i\le l$.

6.7.1) $H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH))=0$, $i\ge 2$. E: 線束の直和 → $H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH))=0$, $i\ge 1$.

6.8) $r=m-1$, $s\ge 0$:

自然数 j, l ($j<l$) を次の条件をみたすものとする:

$H^i(\mathbb{P}^n, S^{p-2}(E)(s))=0$, $j\le {}^\forall i\le l+m-p+1$, $1\le {}^\forall p\le m$.

→ $H^i(\mathcal{O}_P(rD+sH))\simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH))$, $j\le i\le l$.

6.8.1) $H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH))=0$, $2\le i\le n-m-1$. E: 線束の直和 → $H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH))=0$, $1\le i\le n-m-1$.

6.9) $1 \le r \le m-2$, $s \ge 0$:

自然数 j, ℓ ($j<\ell$) を次の様に定める：i) $s \le c_1-(n+1)$ $\to 1 \le j < \ell \le n-r-2$. ii) $c_1-(n+1) < s < c_1$ $\to 1 \le j < \ell \le n-r-1$. iii) $c_1 \le s \to 2 \le j < \ell \le n-r-1$.

j, ℓ が次の2つの条件をみたすものとする：

1) $H^i(S^{r-p}(E)(s)) = 0$, $1 \le {}^\forall p \le r-1$, $j \le {}^\forall i \le \ell+p$.

2) $H^i(S^{p-2}(E^*)(-c_1+s)) = 0$, $j-1 \le {}^\forall i \le \ell+r+p-1$, $3 \le {}^\forall p \le m+1-r$.

$\to$ $H^i(O_P(rD+sH)) \simeq H^i(O_X(rD+sH))$, $j \le i \le \ell$.

6.9.1) $r=1$, $s<c_1$:

$$H^i(O_P(D+sH)) \simeq H^i(O_X(D+sH)), \quad 1 \le i \le n-m-2.$$

$$H^i(O_X(D+sH)) = 0, \quad 1 \le i \le n-m-2, \ c_1-(n+1) \le s < c_1.$$

$$2 \le i \le n-m-2, \quad s<c_1.$$

E：線束の直和ならば,

$$H^i(O_P(D+sH)) \simeq H^i(O_X(D+sH)), \quad 1 \le i \le n-m-1,$$

$$H^i(O_X(D+sH)) = 0, \quad 1 \le i \le n-m-1.$$

6.9.2) $r \ge 2$, $c_1-(n+1) \le s < c_1$:

$$H^i(O_P(rD+sH)) \simeq H^i(O_X(rD+sH)), \quad 1 \le i \le n-m-2,$$

$$H^i(O_X(rD+sH)) = 0, \quad 1 \le i \le n-m-2.$$

E：線束の直和ならば,

$$H^i(O_P(rD+sH)) \simeq H^i(O_X(rD+sH)), \quad 1 \le i \le n-m-1,$$

$$H^i(O_X(rD+sH)) = 0, \quad 1 \le i \le n-m-1.$$

6.9.3) $r \geq 2$, $s < c_1-(n+1)$:

$$H^i(\mathcal{O}_P(rD+sH)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH)), \quad 2 \leq i \leq n-m-2,$$

$$H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH)) = 0, \quad 2 \leq i \leq n-m-2 .$$

E：線束の直和ならば，

$$H^i(\mathcal{O}_P(rD+sH)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH)), \quad 1 \leq i \leq n-m-1,$$

$$H^i(\mathcal{O}_X(rD+sH)) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-m-1 .$$

6.10) $n \geq 3$ のとき，E が線束の直和 $\longleftrightarrow$ $H^1(\mathcal{O}_X(D+sH)) = 0$, $-c_1 < s < c_1-(n+1)$.

References

1. A. Alzati, G. Ottaviani ; A linear bound on the t-normality of codimension two subvarieties of $\mathbb{P}^n$, J. reine angew. Math. 409 (1990), 35 - 40

2. W. Barth, Van de Ven ; A decomposability criterion for algebraic 2-bundles on projective spaces, Inv. Math. 25 (1974), 91 - 106

3. P. A. Griffiths ; Hermitian differential geometry, Chern classes and projective vector bundles, Global Analysis. University of Tokyo Press, Princeton University Press (1969), 185 - 251

4. R. Hartshorne ; Algebraic vector bundles on projective

spaces : a problem list, Topology 18 (1979), 117-128

5. A. Holme ; Codimension 2 subvarieties of projective spaces , Manuscripta math. 65 (1989), 427-446

6. Th. Peternell, J. Le-Potier, M. Schneider ; Vanishing theorems, linear and quardratic normality, Inv. Math. 87 (1987), 573-586

7. J. Le-Potier ; Annulation de la cohomologie a valeurs dans un fibre vectoriel holomorphe positive de rang quelconque, Math. Ann. 218 (1975), 35-53

8. Z. Ran ; On projective varieties of codimension 2, Inv. Math. 73 (1983), 333-336

9. Z. Ran ; Systèmes linéaire complets de sections hypersurfaces sur les variétés projectives de codimension 2, C.R.A.S. 298 (1984), 111-112

10. M. Schneider ; Vector bundles and submanifolds of projective space : Nine Open Problems, Algebraic Geometry Bowdoin 1985, Proc. of Symp. in Pure Math. A.M.S. Vol. 46, 101-107

11. B. Shiffman, A. J. Sommes ; Vanishing Theorems on Complex Manifolds, Birkhäuser PM 56, 1985

12. A. Van de Ven ; Twenty years of classifying algebraic

vector bundles, Algebraic Geometry Angers 1979, Sijthoff & Noordhoff (1980), 3-20.

13. F. L. Zak; Projections of algebraic varieties, Math. Sb. 116 (1981), 593-602